

基于变分方法的超分辨率

刘 刚¹, 胡臻龙²

(1 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033; 2 浙江越秀外国语学院, 浙江 绍兴 312000)

摘 要: 基于全变分先验和变分分布, 提出一个新颖的超分辨率算法, 使用分级的贝叶斯框架, 能够同时计算出重建的高分辨率图像和模型参数。本算法利用变分推论给出变量的后验分布近似。因为能够同时估计出模型参数, 是自动的过程, 无需对参数人工调节。实验结果表明所提算法在重建质量上优于当前主流的算法。

关键词: 超分辨率, 全变分, 参数估计, 贝叶斯方法

中图分类号: TP751

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2012)02-0159-04

A Super-Resolution Algorithm Based on Total Variation

LIU Gang¹, HU Zhen-long²

(1 Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;
2 Zhejiang Yuexiu University of Foreign Languages, Shaoxing 312000, China)

Abstract: a novel algorithm for super resolution based on total variation prior and variational distribution approximations is proposed in this paper. We formulate the problem using a hierarchical Bayesian model where the reconstructed high resolution image and the model parameters are estimated simultaneously from the low resolution observations. The algorithm resulting from this formulation utilized variational inference and provides approximations to the posterior distributions of the latent variables. Due to the simultaneous parameter estimation, the algorithm is fully automated so parameter tuning is not required. Experimental results show that the proposed algorithm outperforms some of the state-of-the-art super resolution algorithms.

Key words: super-resolution, total variation, parameter estimation, Bayesian model

1 引言

高分辨率图像在某些境况下可以从高分辨率采集设备直接得到。但在很多情况下得到的图像像素不够。幸运的是我们可以通过图像处理软件的方法提高图像的分辨率。这种结束就是超分辨率技术, 它可以从一系列低分辨率(LR)图像来重建出一张高分辨率(HR)图像。这些 LR 图像可以看作是 HR 图像经过移动, 降质和下采样过程得到的。因此从一系列低分辨率图像重建出 HR 图像是完全可以做到的。

目前由于全变分方程在图像复原的成功应用, 出现了很多全变分(TV)方程在超分辨率应用的文

章。无论是基于正则化的超分辨率^[2-3]还是基于贝叶斯框架的超分辨率^[4], 都利用全变分来刻画高分辨率图像。然而, 这些方法涉及到的参数都需要人工去调节, 现在很少有文章提出同时能估计出算法参数和 HR 图像。

本文提出一个超分辨率分级的贝叶斯框架, 分两个阶段对 LR 观测图像, 未知的 HR 图像还有一些相关的超参数进行建模。

2 降质过程

现有 L 帧低分辨率(LR)图像 $y = \{y_1, \dots, y_L\}$, 其中 $y_i, i=1, \dots, L$ 代表第 i 帧 LR 图像。超分辨率的目标是利用这 L 帧图像重建出高分辨率(HR)图

收稿日期: 2011-04-30; 修回日期: 2011-06-28

基金项目: 国家“八六三”高科技资助项目(7150080050)

像 x . 假设低分辨率图像的尺寸为 $N \times M$, 高分辨率图像尺寸为 $P_1 N \times P_2 M$, 因此水平和竖直放大因子分别为 P_1 和 P_2 . 把低分辨率图像和高分辨率图像都按照字典次序排列成列向量, 这样得高分辨率图像向量 x 为 $(P_1 N \times P_2 M) \times 1$ 维, 低分辨率图像向量为 $NM \times 1$ 维.

把 $P_1 P_2 NM \times P_1 P_2 NM$ 维位移矩阵记为 C_i , 它 HR 图像 x 映射到 LR 图像 y_i 的对应高分辨率图像 x_i 上, 它需要配准得到. 下采样矩阵记为 $NM \times P_1 P_2 NM$ 维的 A , 模糊的点扩散函数 PSF 记为 $P_1 P_2 NM \times P_1 P_2 NM$ 维的 H_i . 因此 LR 图像的获取过程可以矩阵的表达式为

$$y_i = AH_i C_i x + n_i = B_i x + n_i \quad (1)$$

式中, n_i 为系统噪声, 一般假定为零均值的高斯噪声. 在本文中矩阵 H_i 和 A 被假定为已知的.

3 分级的贝叶斯模型

依据贝叶斯分析, 未知的 x 和观测量 LR 图像 y_i , $i=1, \dots, L$ 被看作随机量并且需要定义它们的先验分布. 这些分布对应的参数叫做超参数. 本文使用分两级的贝叶斯模型. 在第一级中, 对高分辨率图像和观测噪声进行建模; 第二级中, 对超参数的先验分布进行建模.

3.1 贝叶斯模型第一级

3.1.1 LR 图像获取模型

使用式(1)的模型并且假设 n_i 为零均值方差为 β_i^{-1} 的高斯白噪声. LR 图像分布可写为

$$p(y_i | x, \beta_i) \propto \beta_i^{NM/2} \exp \left[-\frac{\beta_i}{2} \| y_i - B_i x \|^2 \right] \quad (2)$$

假设 LR 图像间的噪声为概率独立的, 则在给定 x 的情况下, LR 图像序列的概率分布可以表达为

$$p(y | x, \underline{\beta}) = \prod_i p(y_i | x, \beta_i) = \left[\prod_i \beta_i^{NM/2} \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_i \beta_i \| y_i - B_i x \|^2 \right) \quad (3)$$

式中, $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_L)$.

3.1.2 HR 图像模型

本文采用 TV 先验的二次估计形式表示 HR 图像 x 的先验模型即

$$p(x | \alpha) \propto \alpha^{P_1 P_2 NM/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \alpha TV(x) \right] \quad (4)$$

其中

$$TV(x) = \sum_j \sqrt{(\Delta_j^h(x))^2 + (\Delta_j^v(x))^2} \quad (5)$$

式中: $\Delta_j^h(x)$ 和 $\Delta_j^v(x)$ 分别代表在像素点 j 处求第一次序的水平和竖直方向的微分, 即 $\Delta_j^h(x) = x_j - x_{l(j)}$ 和 $\Delta_j^v(x) = x_j - x_{a(j)}$, 这里的 $l(j)$ 和 $a(j)$ 分别代表位置 j 的左侧和上方的最邻近像素.

3.2 贝叶斯模型第二级: 超参数的先验分布

在贝叶斯模型的第二级, 我们把超参数 α 和 β_i 分布用如下表示:

$$p(\alpha) \propto \text{const}, p(\beta_i) \propto \text{const}, i = 1, \dots, L \quad (6)$$

超参数的 α 和 β_i 分布的选择完全有 LR 观测 y 估计得到.

最终, 结合贝叶斯模型第一级和第二级连立式(3), 式(4)和式(6)得到联合概率分布:

$$p(\alpha, \underline{\beta}, x, y) = p(\alpha, \underline{\beta}) p(x | \alpha) p(y | x, \underline{\beta}).$$

4 变分推论

贝叶斯模型表明对未知量 (α, β, x) 推导应该基于下式:

$$p(\alpha, \underline{\beta}, x | y) = \frac{p(\alpha, \underline{\beta}, x, y)}{p(y)} \quad (7)$$

然而, 找不到后验分布 $p(\alpha, \underline{\beta}, x | y)$ 闭合的形式, 因此本文应用变分的方法通过 $q(\alpha, \underline{\beta}, x)$ 去近似, 同时利用均场估计, 因此 $q(\alpha, \underline{\beta}, x) = q(\alpha, \underline{\beta}) q(x)$. 此外假设 $q(x)$ 为退化分布, 即在 x_k 处为概率 1, 其他为 0. 可以表达为

$$q^k(x) = \delta(x - x^k) \quad (8)$$

可以通过求 $p(\alpha, \underline{\beta}, x | y)$ 与 $q(\alpha, \underline{\beta}, x)$ 间的 Kullback-Leibler(KL) 距离最小化求得 $p(\alpha, \underline{\beta}, x | y)$ 的近似 $q(\alpha, \underline{\beta}, x)$. 它们之间的 KL 距离为

$$C_{KL}(q(\alpha, \underline{\beta}, x) || p(\alpha, \underline{\beta}, x | y)) = \iiint q(\alpha, \underline{\beta}, x) \log \left(\frac{q(\alpha, \underline{\beta}, x)}{p(\alpha, \underline{\beta}, x | y)} \right) d\alpha d\underline{\beta} dx = \iiint q(\alpha, \underline{\beta}, x) \log \left(\frac{q(\alpha, \underline{\beta}, x)}{p(\alpha, \underline{\beta}, x, y)} \right) d\alpha d\underline{\beta} dx + \text{const} \quad (9)$$

它永远是非负的, 并且仅当 $p(\alpha, \underline{\beta}, x | y) = q(\alpha, \underline{\beta}, x)$, 它为 0.

由于使用了 TV 先验, 这样对式(9)求最小化是非常困难的. 定义关于 α, x 和 $P_1 P_2 NM$ 维正向量 u 的方程:

$$M(\alpha, x, u) = \text{const} \times \alpha^{P_1 P_2 NM/2} \times \exp \left[-\frac{\alpha}{2} \sum_j \frac{(\Delta_j^h(x))^2 + (\Delta_j^v(x))^2 + u_j}{\sqrt{u_j}} \right] \quad (10)$$

使用下列不等式,当 $w \geq 0$ 和 $z > 0$ 时

$$\sqrt{wz} \leq \frac{w+z}{2} \Rightarrow \frac{w+z}{2\sqrt{z}} \quad (11)$$

这样得到图像先验的下边界(c 为常数).

$$\begin{aligned} p(\alpha, \beta, x, y) &\geq p(\alpha)p(\beta)M(\alpha, x, u)p(y | x, \beta) \\ &= F(\alpha, \beta, x, u, y) \end{aligned} \quad (12)$$

利用式(12)得到 KL 距离的上边界

$$\begin{aligned} &\iiint q(\alpha, \beta, x) \log \left(\frac{q(\alpha, \beta, x)}{p(\alpha, \beta, x, y)} \right) d\alpha d\beta dx \\ &\leq \min_u \iiint q(\alpha, \beta, x) \log \left(\frac{q(\alpha, \beta, x)}{p(\alpha, \beta, x, u, y)} \right) d\alpha d\beta dx \\ &= M(q(x, \alpha, \beta)) \end{aligned} \quad (13)$$

因此可以通过对式(13)上界最小化来代替对 KL 距离最小化了,来求得 $q(\alpha, \beta, x)$. 我们采用交替最小化方法,即相对于变量中 $\{x, \alpha, \beta\}$ 某一个变量并且其它变量不变时求最小化. 这样得到本文算法.

本文算法:

给定 $u_1, q_1(\alpha, \beta)$

While 当收敛条件没有满足 Do

1. 利用式(14)求得高分辨率图像 x .
2. 利用式(17)求得 u .
3. 利用式(20)~式(21)估计超参数 α, β .

现在推导算法中 while 循环中每一步的解. 首先对 $M(q(x, \alpha, \beta))$ 关于清晰图像 x 求导并令其为 0. 得到的其第 k 步循环为

$$Q(\alpha, \beta)x^k = \sum_i \beta_i B_i^t y_i \quad (14)$$

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_i \beta_i B_i^t B_i + \alpha \Delta^t \begin{bmatrix} W(u^k) & 0 \\ 0 & W(u^k) \end{bmatrix} \Delta \quad (15)$$

式中

$$\Delta = [(\Delta^h)^t (\Delta^v)^t]^t, W(u^k)$$

为

$P_1 P_2 NM \times P_1 P_2 NM$ 的正交矩阵:

$$W(u^k) = \text{diag}([u_j^k]^{-\frac{1}{2}}), j = 1, \dots, P_1 P_2 NM \quad (16)$$

算法的第二步的 u^{k+1} 可由下式得到:

$$u_j^{k+1} = [\Delta_j^h(x^k)]^2 + [\Delta_j^v(x^k)]^2, j = 1, \dots, P_1 P_2 NM \quad (17)$$

从方程可以清晰看出向量 u^{k+1} 表征着高分辨率图像 x_k 的局部空间活动. 因此式(16)中的矩阵 $W(u^k)$ 可看作是空间自适应矩阵,因为它能根据在每个像素位置的亮度改变强度来控制每个像素的平

滑性.

对于式(14)直接求解 HR 图像实际上是很困难的,因为很难求出一个大矩阵的逆. 本文采用共轭梯度算法来迭代求解 HR 图像.

最后,在算法的最后一步,超参数的分布 $q^{k+1}(\alpha)$ 和 $q^{k+1}(\beta_i)$ 通过对 $M(q(x, \alpha, \beta))$ 关于 $q(\alpha, \beta_i)$ 求导并令其为 0 求得. 这些超参数的分布为 Gamma 分布:

$$q^{k+1}(\alpha) \propto \alpha^{P_1 P_2 NM/2} \exp[-\alpha \sum_j \sqrt{u_j^{k+1}}] \quad (18)$$

$$q^{k+1}(\beta_i) \propto \beta_i^{NM/2} \exp[-\beta_i \frac{\|y_i - B_i x^k\|^2}{2}] \quad (19)$$

这些分布的均值分别是

$$\alpha^{k+1} = E_{q^{k+1}(\alpha)}[\alpha] = \frac{P_1 P_2 NM/2 + 1}{\sum_j \sqrt{u_j^{k+1}}} \quad (20)$$

$$\beta^{k+1} = E_{q^{k+1}(\beta)}[\beta_i] = \frac{NM + 2}{\|y_i - B_i x^k\|^2} \quad (21)$$

5 实验结果

用本算法与 bicubic 插值,文献[7]中算法(记为 MS)和文献[4]中的算法(基于 BTV,记为 FRS)进行比较. FRS 算法的参数的选取的是根据文献[4]最好的效果图像时的参数. 本文算法的终止条件为 $\|x^k - x^{k-1}\|_2 / \|x^{k-1}\|_2 < 10^{-4}$, 采用共轭梯度法.

在第一个实验中,对初始 HR 图像进行平移,模糊,4 倍下采样,加入噪声产生 16 个 LR 图像. 对这 16 个 LR 图像应用 bicubic 插值,MS,FRS 算法,放大系数为 4. 图 1 所示为重建的结果. 所有的算法产生的效果都要比 bicubic 插值产生的效果好. 比较图 1 的(b)~(d),可以清晰的看出,本文算法重建图像视觉效果最好,可以看出其中的数字和线,在本算法产生图像中会更锐利些.

在第二个实验中,用取自文献[4]的 disk 的序列来取完成此实验. 取 20 帧,利用 Lucas-Kanade 的金字塔光流算法来进行运动估计,模糊视为方差为 1 的 6×6 的高斯模糊,对其进行放大系数为 2 的重建. 图 2 所示为重建的结果. 可以看出,虽然有运动估计的误差存在,本文算法比其他算法清晰,并且比其他算法产生更少的振铃效果.

6 结束语

本文提出一个基于全变分图像先验的贝叶斯超

分辨率, 在分级的贝叶斯框架中, 可以同时估计出 HR 图像、每一 LR 图像的系统运动和噪声. 利用变

分推论估计未知量的先验分布. 本文的主要创新点在于模型参数能够在重建过程中估计出来, 因此本算法可以说是全自动的, 而现有的其他算法大都要求手工参数的调节. 实验结果证明本文算法无论在合成图像和真实图像都优于其他算法.

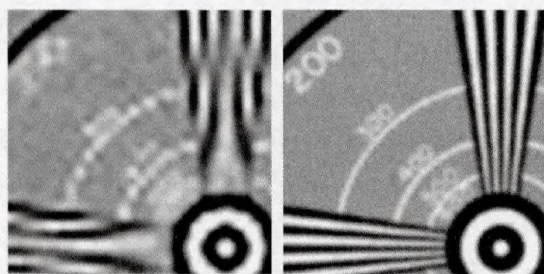
参考文献:

- [1] Katsaggelos A K, Molina R. Super Resolution of Images and Video. Morgan and Claypool, 2007.
- [2] Ng M K, Shen H. A total variation regularization based super-resolution reconstruction algorithm for digital video [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2007. 74585.
- [3] Chan T F, Ng N. Superresolution image reconstruction using fast inpainting algorithms [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 23(1): 3-24.
- [4] Farsiu S, Robinson M D. Fast and robust multiframe superresolution [J]. IEEE Trans. Image Processing, 10, 2004, Vol. 13, no. 10, pp. 1327-1344.
- [5] 朱福珍, 李金宗, 朱兵, 等. 基于径向基函数神经网络的超分辨率图像重建 [J]. 光学精密工程, 2010, 6(18): 1444-1450.
- [6] Bioucas-Dias J, Figueiredo M. Adaptive Bayesian/total-variation image deconvolution: A majorization minimization approach. EUSIPCO, 2006.
- [7] Elad M, Hel-Or Y. A fast super-resolution reconstruction algorithm for pure translational motion and common space-invariant blur^[J]. IEEE Trans Image Processing, 2001, 10(8): 1187-1193.
- [8] 陈浩, 王延杰. 基于小波变换的图像融合技术研究 [J]. 微电子学与计算机, 2010(05).
- [9] 马鲜艳. 多特征融合的图形图像分类算法 [J] 2009 (06).
- [10] 张进, 王仲, 李雅洁, 等. 高精度影像测量系统中图像的超分辨率重建 [J]. 光学精密工程, 2011, 1(19): 168-174.

作者简介:

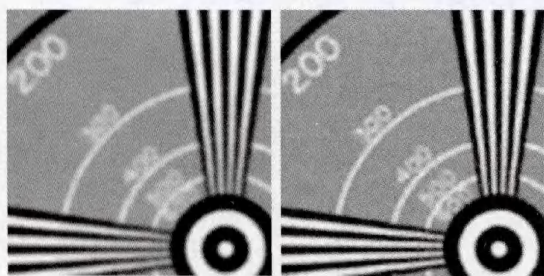
刘 刚 男, (1982—), 博士研究生. 研究方向为超分辨率视频压缩.

胡臻龙 男, 讲师. 研究方向为三维图像.



(a) bicubic 插值

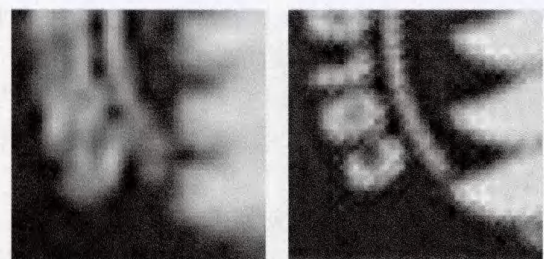
(b) MS



(c) FRS

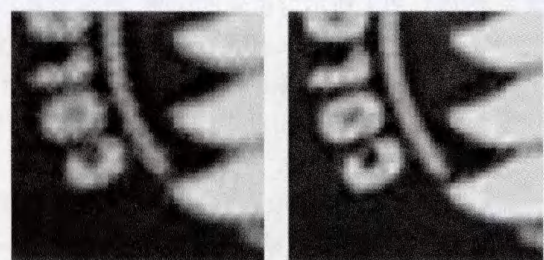
(d) 本文算法

图 1 重建的结果



(a) bicubic 插值

(b) MS



(c) FRS

(d) 本文算法

图 2 重建的结果